

ДВИЖЕНИЕ ПОДВОДНОГО КОНТУРА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ФРУДА И МАЛОМ ПОГРУЖЕНИИ

О.М. Киселев, С.И. Филиппов

НИИММ Казанского государственного университета

Постановка задачи. Пусть плоский стационарный потенциальный поток весомой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью Ω обтекает гладкий замкнутый контур Λ в плоскости $z = x + iy$ (рис. 1,а). Ось y направлена вертикально вверх, ось x - вдоль невозмущенного уровня жидкости в направлении ее движения.

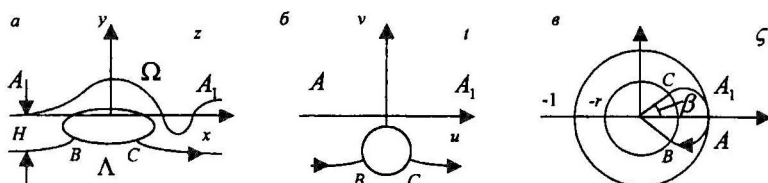


Рис. 1

Будем считать, что критические точки потока лежат на контуре Λ , и обозначим через H расстояние от разветвляющейся на Λ линии тока до свободной поверхности при $x = -\infty$. Пусть α - угол между касательной к Λ и осью x , L - длина контура Λ , s - безразмерная (отнесенная к L) дуговая абсцисса контура, возрастающая при движении по Λ против хода часовой стрелки. Форму контура Λ определим с помощью соотношений

$$\alpha = 2\pi s + G(s), L/H = l_0, \quad (1)$$

где $G(s)$ - заданная функция, удовлетворяющая условию $G(s+1) = G(s)$, l_0 - заданная постоянная.

Пусть V - модуль скорости, V_0 - значение V в невозмущенном потоке, g - ускорение силы тяжести, Γ - циркуляция скорости по контуру Λ . Будем считать, что

$$\gamma = \Gamma / 2\pi V_0 H = \gamma_0, \quad Fr = V_0^2 / gH = f_0, \quad (2)$$

где Fr - число Фруда, γ_0, f_0 - заданные постоянные.

Интеграл Бернулли для свободной поверхности Ω можно записать в виде

$$\ln V - \frac{1}{2} \ln(1 - 2vy) = \ln V_0, \quad v = g/V_0^2, \quad z \in \Omega. \quad (3)$$

Предположим, что на свободной поверхности V близко к V_0 ($|vy|$ мало), и заменим (3) на приближенное соотношение

$$\ln V + vy = \ln V_0, \quad z \in \Omega. \quad (4)$$

В плоскости $t = u + iv$ области G_z , занятой течением, поставим в соответствие область G_t - нижнюю полуплоскость с удаленным из нее кругом

$$|t - t_0| < 2r/(1 - r^2), \quad t_0 = -i(1 + r^2)/(1 - r^2), \quad (5)$$

где r - некоторая постоянная из интервала $(0, 1)$. Пусть при этом бесконечно удаленные точки обеих областей соответствуют друг другу. Контур Λ в плоскости t отвечает окружность Λ_t , заданная уравнением

$$t = t_0 + 2r/(1 - r^2)e^{i\omega}, \quad \text{Im } \omega = 0, \quad (6)$$

а свободной поверхности Ω - прямая $\Omega_t = \{-\infty < u < \infty, v = 0\}$ (рис. 1, б).

Потребуем, чтобы функция $z(t)$, конформно отображающая G_t на G_z , удовлетворяла условиям

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty, \quad (7)$$

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow K, \quad u \rightarrow -\infty \text{ или } v \rightarrow -\infty, \quad (8)$$

$$\text{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln \left| \frac{dw}{dt} \right| - \ln V_0, \quad t \in \Omega_t. \quad (9)$$

Здесь K - положительная постоянная, имеющая размерность длины, w - комплексный потенциал. Условия (7), (8) отражают характер затухания возмущений, условие (9) эквивалентно (4).

Таким образом, задача сводится к отысканию комплексного потенциала $w(t)$ и отображающей функции $z(t)$, обеспечивающей выполнение условий (1), (2), (7)-(9).

Комплексный потенциал $w(t)$. Л.М.Милн-Томсон в [1] (стр.177) предлагает доказать, что формулы

$$w = -iVz + 2iVa^2z \left\{ \frac{1}{z^2 - b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a^{2n} / \prod_{k=0}^{n-1} (b + x_k)^2 (z^2 - x_n^2) \right] \right\}, \quad (10)$$

$$z = x + iy, \quad x_0 = b, \quad x_n = b - a^2 / (b + x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

определяют комплексный потенциал течения в области z , ограниченной осью y и окружностью $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ ($b > a$), когда вектор скорости набегающего потока, равный по модулю V ,

направлен вдоль оси y . Выполним в (10) замены $V = KV_0$, $z = it$, $x_n = \xi_{n+1}$ и добавив член, отвечающий за циркуляцию скорости Γ , получим

$$w = KV_0 \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} - i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \right), \quad \delta = \frac{\Gamma}{2\pi KV_0}, \quad (11)$$

$$A_1 = 2a^2, \quad A_n = 2a^2 / \prod_{k=1}^{n-1} (b + \xi_k)^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

Положив в (11) $a = 2r/(1-r^2)$, $b = (1+r^2)/(1-r^2)$, будем иметь

$$\xi_n = \frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}, \quad A_n = \frac{8r^{2n}}{(1-r^{2n})^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Покажем, что выражения (11), (12) определяют искомый комплексный потенциал течения $w(t)$. Конформные отображения

$$t = i(\zeta + 1)/(\zeta - 1), \quad \zeta = (t + i)/(t - i) \quad (13)$$

устанавливают соответствие между областью G_t и кольцом $r < |\zeta| < 1$ (рис. 1, в), при этом окружности Λ_t отвечает окружность $\zeta = re^{i\sigma}$ (σ - центральный угол в плоскости ζ). При $t \in \Lambda_t$ связь между ω и σ определяется формулами

$$\omega = -\frac{\pi}{2} + \sigma + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \sigma}{1 - r \cos \sigma}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} + \omega - 2 \operatorname{arctg} \frac{r \cos \omega}{1 - r \sin \omega}. \quad (14)$$

Используя (14), из (12), (13) элементарными преобразованиями можно получить соотношения

$$g_0 = t|_{\Lambda_t} = -i \frac{1 + re^{i\sigma}}{1 - re^{i\sigma}} = -i \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\sigma} \right),$$

$$g_n = \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} \Big|_{\Lambda_t} = \frac{2ir^{2n-1} e^{-i\sigma} (1 - r^2 e^{2i\sigma})}{(1 - r^{2n-1} e^{i\sigma})(1 - r^{2n+1} e^{i\sigma})} =$$

$$= 2i \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n-1)k} e^{-ik\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n+1)k} e^{ik\sigma} \right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = -i + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma, \quad -i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \Big|_{\Lambda_t} = \delta(\sigma - i \ln r),$$

$$\phi|_{\Lambda_t} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma + \delta\sigma \right), \quad \psi|_{\Lambda_t} = -KV_0(1 + \delta \ln r),$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \varphi \Big|_{\Lambda_r} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1-r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right). \quad (15)$$

Здесь φ - потенциал скорости, ψ - функция тока. Поскольку $\psi|_{\Lambda_r}$ не зависит от σ , окружность Λ_r является линией тока. Когда δ удовлетворяет условию

$$\delta_0^- < \delta < \delta_0^+, \quad \delta_0^- = -4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1-r^{2n}}, \quad \delta_0^+ = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nr^n}{1-r^{2n}}, \quad (16)$$

уравнение относительно σ , получаемое приравниванием нулю правой части выражения (15), имеет два корня: $\sigma = \beta \in (0, \pi)$ и $\sigma = 2\pi - \beta$. При этом в соответствии с (6), (14) формулы для определения критических точек t_b и t_c на контуре Λ_r имеют вид

$$t_c = t_0 + \frac{2r}{1-r^2} e^{i\omega_\beta}, \quad t_b = t_0 - \frac{2r}{1-r^2} e^{-i\omega_\beta}, \quad (17)$$

$$\omega_\beta = -\frac{\pi}{2} + \beta + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta}{1 - r \cos \beta}.$$

Будем считать, что условие (16) выполнено и, следовательно, критические точки потока лежат на контуре Λ . Поскольку

$$H = (\psi|_{\Omega} - \psi|_{\Lambda})/V_0, \quad \psi|_{\Omega} = 0, \quad \psi|_{\Lambda} = -KV_0(1 + \delta \ln r),$$

то

$$H = K(1 + \delta \ln r) = K(1 - \gamma \ln r)^{-1}, \quad \delta = \gamma/(1 - \gamma \ln r), \quad \gamma = \delta/(1 + \delta \ln r). \quad (18)$$

Можно показать, что при условии (16) величина $1 + \delta \ln r$ положительна ($1 + \delta_0^+ \ln r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$) и, следовательно, $\psi|_{\Lambda} < 0$, $H > 0$, δ и γ имеют одинаковые знаки.

Отображающая функция $z(t)$. Согласно (11),

$$\frac{dw}{dt} = KV_0 P(t), \quad P(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\xi_n^2 - t^2}{(t^2 - \xi_n^2)^2} - \frac{2\delta}{1+t^2}. \quad (19)$$

Подставив (19) в (9), получим

$$\operatorname{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) = \ln K + \ln |P(t)|, \quad t \in \Omega_r. \quad (20)$$

В соответствии с (7), (8), (20)

$$\ln \frac{dz}{dt} + ivz = iat + ib + \ln K + \ln F(t), \quad (21)$$

$$a = vK = (1 - \gamma \ln r)/Fr = (1 + \delta \ln r)^{-1}/Fr, \quad (22)$$

где b - произвольная вещественная постоянная, а $F(t)$ - аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < |F(t)| < \infty, \quad t \in \bar{G}_t; \quad |F(t)| = |P(t)|, \quad t \in \Omega_t; \quad F(\infty) = 1. \quad (23)$$

Заметим, что $P(t)$ не принадлежит классу функций $F(t)$, поскольку $P(t_b) = P(t_c) = 0$. Функцию $F(t)$ представим в виде

$$F(t) = P(t)Q(t)R(t), \quad Q(t) = \frac{(t - \bar{t}_b)(t - \bar{t}_c)(t - \bar{t}_0)^2}{(t - t_b)(t - t_c)(t - \bar{t}_0)^2}, \quad (24)$$

$$R(t) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (t - t_0)^{-n} \right) / \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n (t - \bar{t}_0)^{-n} \right), \quad B_n = b_n + id_n,$$

где b_n, d_n - вещественные коэффициенты. Нетрудно убедиться, что при таком представлении все условия (23) выполнены.

Решив дифференциальное уравнение (21) относительно $z(t)$, с учетом (7) найдем

$$vz = at + b - i \ln T(t), \quad \frac{dz}{dt} = KU(t), \quad U(t) = \frac{F(t)}{T(t)}, \quad (25)$$

$$T(t) = 1 + iae^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt.$$

Здесь интегрирование ведется от точки с координатами $v = 0, u = -\infty$.

Таким образом, задача (1), (2), (4) сводится к определению параметра r и коэффициентов b_n, d_n (параметры $\xi_n, A_n, t_0, t_b, t_c, \delta, a$, входящие в решение, выражаются через r, γ, Fr по формулам (5), (12), (17), (18), (22)).

Гидродинамические коэффициенты C_x, C_y . Обозначим функции $P(t), R(t), F(t), T(t), U(t)$ при $t \in \Lambda_t$ соответственно через $P_1(\omega), R_1(\omega), F_1(\omega), T_1(\omega), U_1(\omega)$. Для коэффициентов сопротивления и подъемной силы в соответствии с формулами Чаплыгина - Блазиуса будем иметь

$$C_x - iC_y = \frac{i}{V_0^2 H_{\Lambda_t}} \oint \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dt}{dz} dt = - \frac{2r}{1-r^2} (1 - \gamma \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{P_1^2(\omega)}{U_1(\omega)} e^{i\omega} d\omega.$$

Алгоритм решения задачи. В соответствии с (25) зависимости $\alpha(\omega), s(\omega)$ выражаются формулами

$$\alpha = \pi/2 + \omega + \arg U_1(\omega), \quad s = s_0 + \frac{\omega}{0} \int_0^{2\pi} |U_1(\omega)| d\omega / \int_0^{2\pi} |U_1(\omega)| d\omega, \quad (26)$$

где $s = s_0$ - корень уравнения

$$2\pi s + G(s) = \alpha_0 = \pi/2 + \arg U_1(0). \quad (27)$$

Условия $L/H = l_0$, $\gamma = \gamma_0$, $Fr = f_0$ приводят к равенствам

$$\frac{2r}{1-r^2} (1-\gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} |U_1(\omega)| d\omega = l_0, \quad (28)$$

$$\delta = \gamma_0 (1-\gamma_0 \ln r)^{-1}, \quad a = f_0^{-1} (1-\gamma_0 \ln r). \quad (29)$$

Положим $B_n = 0$ при $n \geq M$, где M - достаточно большое целое число, и введем обозначения: $\mu = \{r, \{\xi_n, A_n\}, t_0, t_b, t_c, \delta, a\}$, $\tau = \{b_1, b_2, \dots, b_{M-1}, d_1, d_2, \dots, d_{M-1}\}$. Таким образом, μ - это комплекс параметров, содержащий r и параметры, определяемые через r с помощью соотношений (12), (5), (17), (29); τ - вектор, состоящий из коэффициентов b_n, d_n ($1 \leq n \leq M-1$). Учитывая зависимость рассматриваемых нами функций ω от μ и τ , будем при необходимости использовать для них обозначения $U_1(\omega; \mu, \tau)$, $F_1(\omega; \mu, \tau)$, $T_1(\omega; \mu, \tau)$.

Разделим окружность Λ_r на N частей ($N > 2M$) точками $t_j = t_0 + 2r \exp(i\omega_j)/(1-r^2)$, $\omega_j = \pi j/N$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, и рассмотрим функционал

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j))^2, \quad \alpha_j = \alpha(\omega_j), \quad s_j = s(\omega_j). \quad (30)$$

Для определения μ и τ применим метод итераций. Пусть $\mu^{(k)}, \tau^{(k)}$ - k -е приближение для μ и τ . Положим в (28) $F_1(\omega) = F_1(\omega; \mu, \tau^{(k)})$, $T_1(\omega) = T_1(\omega; \mu^{(k)}, \tau^{(k)})$. Полученное соотношение совместно с (12), (5), (17), (29) используем для определения $\mu^{(k+1)}$.

Вектор $\tau^{(k+1)}$ найдем из условия $W = \min W$, полагая в (26), (27) $F_1(\omega) = F_1(\omega; \mu^{(k+1)}, \tau)$, $T_1(\omega) = T_1(\omega; \mu^{(k)}, \tau^{(k)})$. Для минимизации функционала W в (30) применим метод сопряженных градиентов, используя следующие выражения:

$$\frac{\partial W}{\partial c_n} = 2 \sum_{j=0}^{N-1} \left(\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j) \right) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} - 2\pi \frac{\partial s_j}{\partial c_n} - G'(s_j) \frac{\partial s_j}{\partial c_n} \right), \quad c_n = b_n, d_n,$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial c_n} = \frac{\partial s_0}{\partial c_n} + \left(\int_0^{2\pi} |U_1| d\omega \int_0^{\omega_j} \frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} d\omega \int_0^{\omega_j} |U_1| d\omega \right) \left(\int_0^{2\pi} |U_1| d\omega \right)^{-2},$$

$$\frac{\partial s_0}{\partial c_n} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial c_n} (2\pi + G'(s_0))^{-1}, \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} = \operatorname{Im} \left(\frac{\partial R_1}{\partial c_n} / R_1 \right),$$

$$\frac{\partial |U_1|}{\partial c_n} = |U_1| \operatorname{Re} \left(\frac{\partial R_1}{\partial c_n} / R_1 \right), \quad \frac{\partial R_1}{\partial b_n} = S_1 [(t_\omega - t_0)^{-n} - R_1 (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n}],$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial d_n} = i S_1 [(t_\omega - t_0)^{-n} + R_1 (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n}], \quad S_1 = \left[1 + \sum_{n=1}^{M-1} \bar{B}_n (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right]^{-1},$$

$$t_\omega = t_0 + 2re^{i\omega} / (1 - r^2).$$

Последний этап $(k+1)$ -го шага итерационного процесса заключается в нахождении $T_1(\omega; \mu^{(k+1)}, \tau^{(k+1)})$ в точках $\omega = \omega_j$.

Результаты расчетов. На рис. 2 представлены результаты расчетов, полученные при исследовании обтекания кругового цилиндра ($G(s) \equiv 0$)

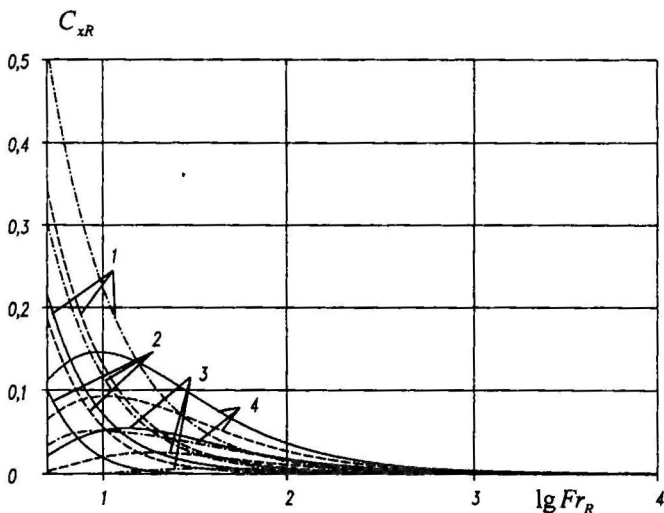


Рис.2

При этом в качестве масштаба длины выбран радиус поперечного сечения цилиндра R и использованы обозначения $H_R = H/R$, $Fr_R = Fr \cdot H_R$, $\gamma_R = \Gamma/V_0 R$, $C_{xR} = C_x H_R$, $X = x/R$, $Y = y/R$. На рис. 2 показана зависимость C_{xR} от $\lg Fr_R$ ($5 \leq Fr_R \leq 10^4$) для некоторых значений γ_R и H_R ; значениям $\gamma_R = -1,5; -1; 0,5; 1$

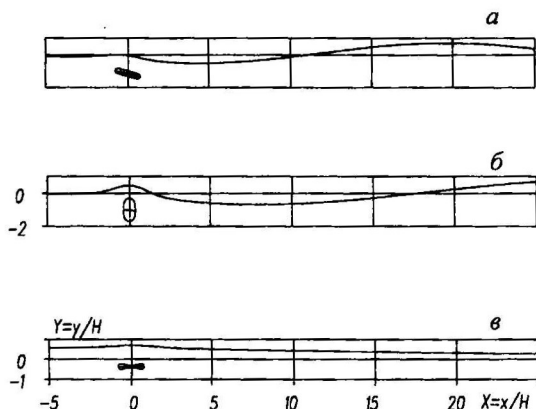


Рис. 3

отвечают кривые 1-4, значениям $H_R = 0,35; 0,5; 0,75$ соответствуют сплошные, штриховые и штрих-пунктирные кривые.

В рассматриваемом диапазоне изменения Fr_R и H_R коэффициент волнового сопротивления C_{xR} при $\gamma_R < 0$ монотонно убывает с ростом Fr_R и уменьшением H_R , при $\gamma_R > 0$ зависимость $C_{xR}(Fr_R)$ имеет максимум, значение которого растет с увеличением γ_R и уменьшением H_R .

С целью апробации развиваемого метода было рассмотрено обтекание ряда профилей с уравнением контура вида

$$\alpha = 2\pi s + a_0 + \sum_{k=1}^4 a_k \sin 4k\pi s. \quad (31)$$

Вид профиля и свободной поверхности для трех вариантов задания определяющих параметров показан на рис. 3 (здесь $X = x/H$, $Y = y/H$). Положение точек разветвления и схода потока отмечено с помощью отрезков, проведенных к ним из центра профиля. Значения коэффициентов a_k (31) и параметров $l_0(1)$, γ_0 и $f_0(2)$ для вариантов а, б, в приведены в табл. 1.

Табл. 1

Рис.3	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	l_0	γ_0	f_0
<i>a</i>	-0,27	-0,87	0,3	-0,09	0,016	3,5	-0,025	5
<i>б</i>	0	0,45	0	0	0	3,5	-0,025	7
<i>в</i>	0	-1,1	0,25	-0,09	0,02	3,5	-0,025	100

Анализ известных авторам численных решений задачи об установившемся движении цилиндра под свободной поверхностью, найденных с помощью различных приближенных методов, показал, что все они, кроме решений работы [2], принадлежат области малых чисел Фруда. Результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что развиваемый в ней метод может служить удобным инструментом для получения решений в области больших чисел Фруда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99-01-00169, 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидромеханика*. – М.: Мир, 1964. – 665 с.
2. Киселев О.М., Троепольская О.В. *О поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости* // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – №6. – С.9-22.

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ ЗАДАННОЙ ШИРИНЫ

Е. Г. Ефимова

Чувашский государственный университет, г. Чебоксары
efimova@chuvsu.ru

В физической плоскости течения $z = x + iy$ неограниченный плоский поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает с развитой кавитацией в рамках модели Тулина–Терентьева жесткую прямолинейную пластинку AB заданной длины l , расположенную под углом α к действительной оси. Спирали C_1 и C_2 в хвостовой части каверны расположены на разных сторонах бесконечной полосы заданной ширины δ , лежащей параллельно действительной оси.